DEVOIR DE SYNTHESE N°3

4 ème Math 1+2 **Durée : 4h**

EXERCICE N°1

(Les deux parties A et B sont indépendantes)

A/ On considère deux droites (xx') et (yy') sécantes en un point O et on suppose que [Ox , Oy] est un secteur aigu. Soit un point fixe F à l'intérieur de [Ox , Oy] et n'appartenant pas à la bissectrice de ce secteur.

1/ Montrer qu'il existe une parabole $(\mathcal{P})$ de foyer F et tangente à la fois à (xx') et (yy').
Construire les points de contact avec (xx') et (yy').

2/ On considère les coniques (C) qui sont des ellipses ou des hyperboles tangentes à la fois à (xx') et (yy') et dont l'un des foyers est F.

a) Montrer que le cercle directeur relatif à l'autre foyer F' passe par deux points fixes F_1 et F_2.

b) En déduire que le point F' varie sur une droite Δ que l'on précisera.

c) Montrer que le centre O de (C) varie sur une droite δ à préciser.

B/ Dans cette question D désigne une droite coupant un segment $[AF']$ en un point I distinct de A et de F'.

$(\mathcal{H})$ désigne une hyperbole de foyer F' de sommet A et tangente à D.

1/ Trouver une construction du centre O de cette hyperbole.

2/ Construire alors l'autre foyer F et l'autre sommet A' de $(\mathcal{H})$.

EXERCICE N°2

Une urne contient 9 jetons réparties comme suit :

- 5 jetons rouges numérotés 1 , 1 , 1 , 2 , 2.
- 2 jetons blancs numérotés 1 , 2.
- 2 jetons noirs numérotés 2 , 3.

1/ On tire simultanément et au hasard trois jetons de l'urne , calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « avoir trois jetons portants des numéros de même parité »

B : « avoir trois jetons dont la somme des numéros est 5 »

2/ On recommence l'épreuve précédente quatre fois de suite en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne et on désigne par X l'aléa numérique qui associe le nombre de réalisation de l'événement A.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

3/ On tire simultanément trois jetons de l'urne.

∗ Si A est réalisé on remet les jetons tirés dans l'urne et on tire successivement et avec remise deux jetons de l'urne.

∗ Si A n'est pas réalisé on remet les jetons tirés dans l'urne et on tire successivement et sans remise trois jetons de l'urne.

Soit Y l'aléa numérique égale au nombre de couleurs obtenues.

Déterminer la loi de probabilité de Y.

PROBLEME

A

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = (x - 1)\, e^{(2 - x)}$

$\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ Etudier les variations de f puis construire sa courbe.

2/ a) Soit $\alpha \in]1, +\infty[$, par une intégration par parties , calculer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$

de la partie limitée par $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $y = 0$, $x = 1$ et $x = \alpha$.

b) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \mathcal{A}(\alpha)$.

$\boxed{B}$

Soit g_n la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $g_n(x) = (x-1)^n \, e^{(2-x)}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

et $\mathscr{C}_n$ la courbe de g_n dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ a) Dresser le tableau de variations de g_n (pour $n = 1$ puis pour $n \geq 2$)

b) En déduire que pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a : $0 \leq g_n(x) \leq e^{1-n}.n^n$

2/ a) Etudier la position relative de $\mathscr{C}_{n+1}$ par rapport à $\mathscr{C}_n$.

b) Construire $\mathscr{C}_2$.

3/ On pose $J_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_1^2 (x-1)^n \, e^{(2-x)} \, dx$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

a) Interpréter graphiquement J_1.

b) Par une intégration par parties , montrer que : $J_{n+1} = J_n - \dfrac{1}{(n+1)!}$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = e - \left(\dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + ... + \dfrac{1}{n!}\right)$.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq J_n \leq \dfrac{e}{n!}$.

e) Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + ... + \dfrac{1}{n!}\right)$

$\boxed{C}$

Soit F la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} \dfrac{e^{(2-t)}}{t-1} \, dt$

1/ a) Montrer que F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que $F'(x) = \dfrac{e^{(1-x)} \, [(e-1)x + 1]}{x(1-x)}$

b) En déduire le sens de variation de F sur $]1, +\infty[$.

2/ a) A l'aide de la fonction f de la partie $\boxed{A}$ montrer que pour tout $t \in]1, +\infty[$

on a : $0 \leq \dfrac{e^{(2-t)}}{t-1} \leq \dfrac{1}{(t-1)^2}$.

b) En déduire que pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a : $0 \leq F(x) \leq \dfrac{1}{x(x-1)}$.

c) Calculer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

3/ a) Montrer que pour tout $x \in]1, 2]$, et pour tout $t \in [x, x+1]$

on a : $\dfrac{e^{(2-t)}}{t-1} \geq \dfrac{e^{(1-x)}}{t-1}$.

b) En déduire que $F(x) \geq e^{(1-x)} \, [\mathrm{Log}\, x - \mathrm{Log}(x-1)]$.

Calculer $\lim\limits_{x \to 1^+} F(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de F.

d) Construire l'allure de la courbe de F.